

# Macroeconometría (2005–2006)

## Examen final

Nikolas A. Müller-Plantenberg\*

30 de junio de 2006

Nombre: \_\_\_\_\_

Apellido: \_\_\_\_\_

NIF: \_\_\_\_\_

### Instrucciones

Por favor, no leer las preguntas antes de que el profesor lo indique.

Hay tres partes, cada una con dos preguntas entre las que se puede elegir. **Contesta tres preguntas, una de cada parte.**

No hay ninguna ventaja de contestar ambas preguntas de una parte; en caso de que haya respuestas a las dos preguntas, sólo vale la respuesta a la primera de las dos preguntas.

Duración del examen: **2 horas** (40 minutos para cada pregunta).

---

\*E-mail: nikolas.muller@uc3m.es. Address: Room 15.1.08, Department of Economics, Universidad Carlos III de Madrid, Calle Madrid 126, 28903 Getafe (Madrid), Spain. Phone: +34 91 624-8669.

Pregunta	Puntos	Obtenido
1	33	
2	33	
3	33	
4	33	
5	34	
6	34	
Total	200	

## 1. Ecuaciones en diferencias

1. (a) En general, la solución de una ecuación en diferencias del segundo orden depende de las raíces características,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . ¿Qué forma tiene la solución en cada uno de los siguientes casos?

I. Las raíces características,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , son reales y distintos. [2]

II. Las raíces características,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , son reales e iguales. [2]

III. Las raíces características,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , son imaginarias. [2]

Considera la siguiente ecuación en diferencias del segundo orden:

$$y_t = 0,6y_{t-1} - 0,09y_{t-2} + 0,98. \quad (1)$$

(b) Deriva la ecuación característica de la ecuación (1). ¿Cuáles son las raíces características? [6]

(c) Deriva la solución homogénea,  $y_t^h$ , una solución particular,  $y_t^p$ , y la solución general,  $y_t^g$ , de la ecuación (1). [7]

(d) Suponemos que hay las siguientes condiciones iniciales: [7]

$$y_0 = 3,$$

$$y_2 = 2,27.$$

Con estas condiciones iniciales, ¿cuál es la solución general,  $y_t^g$ ?

(e) Sustituye la solución homogénea,  $y_t^h$ , en la ecuación homogénea asociada con la ecuación (1) y comprueba así que la solución homogénea es correcta. [7]

Total de pregunta 1: [33]

2. Considera el siguiente modelo de una economía abierta:

$$s_t = -\xi c_t, \quad (2a)$$

$$q_t = s_t, \quad (2b)$$

$$z_t + c_t = 0, \quad (2c)$$

$$z_t = z_{t-1} - \phi q_{t-1}, \quad (2d)$$

donde

$q_t$  := tipo de cambio real (aumento = apreciación real),

$s_t$  := tipo de cambio nominal (aumento = apreciación nominal),

$z_t$  := cuenta corriente (exportaciones netas),

$c_t$  := transferencias de dinero ("cash flow"),

$\xi > 0$ ,

$\phi > 0$ .

(a) Interpreta las ecuaciones del modelo en términos económicos. [4]

- (b) De las ecuaciones del modelo (2), forma una ecuación en diferencias en  $z_t$  como única variable. [4]
- (c) Deriva la ecuación característica, mostrando todos los pasos. ¿Cuáles son las raíces características? [4]
- (d) Deriva la solución homogénea,  $y_t^h$ , una solución particular,  $y_t^p$ , y la solución general,  $y_t^g$ , de la ecuación en diferencias que has derivado en la parte (b). [4]

Ahora considera el siguiente modelo alternativo:

$$s_t = -\xi c_t, \quad (3a)$$

$$q_t = s_t, \quad (3b)$$

$$z_t + d_t + c_t = 0, \quad (3c)$$

$$d_t = d_t^1 - d_{t-1}^1, \quad (3d)$$

$$c_t = d_{t-1}^1, \quad (3e)$$

$$z_t = z_{t-1} - \phi q_{t-1}, \quad (3f)$$

donde

$d_t^1 :=$  flujo de deuda, creada en  $t$ , a devolver en  $t + 1$ .

- (e) ¿Cómo cambia la interpretación económica del modelo con respecto al modelo anterior? [4]
- (f) De las ecuaciones del modelo (3), forma una ecuación en diferencias en  $z_t$  como única variable. [4]
- (g) Deriva la ecuación característica, mostrando todos los pasos. ¿Cuáles son las raíces características? [4]
- (h) Deriva la solución homogénea,  $y_t^h$ , una solución particular,  $y_t^p$ , y la solución general,  $y_t^g$ , de la ecuación en diferencias que has derivado en la parte (f). [5]

Total de pregunta 2: [33]

## 2. Modelos de series temporales univariantes

3. Considera el siguiente proceso ARMA(4,2):

$$y_t = 0,5y_{t-1} + \phi y_{t-3} - 0,5\phi y_{t-4} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + 0,25\varepsilon_{t-2},$$

donde

$$\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2),$$

$$|\phi| < 1.$$

- (a) Demuestra que el modelo en ecuación (3) es sobreparametrizado y que el modelo siguiente es equivalente: [6]

$$y_t = \phi y_{t-3} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}. \quad (4)$$

- (b) Determina si el modelo en ecuación (4) es estacionario. Explica tu respuesta. [6]  
(c) Calcula la función de autocorrelación del modelo en ecuación (4). Dibuja el correlograma para los primeros nueve retardos; es decir, la función de autocorrelación,  $\rho_k$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ . [8]  
(d) El modelo en ecuación (4) es de la siguiente forma: [7]

$$y_t = \phi y_{t-3} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}.$$

Demuestra como se puede transformar este modelo en un modelo de medias móviles del orden infinito:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}.$$

- (e) Determina los valores de  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  y  $\psi_3$  en términos de  $\phi$  y  $\theta$ . [6]

Total de pregunta 3: [33]

4. Considera el siguiente proceso ARMA(5,1):

$$y_t = y_{t-1} + \phi y_{t-4} - \phi y_{t-5} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

donde

$$|\phi| < 1,$$

$$\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

- (a) Demuestra que el proceso no es estacionario y determina los valores de  $p, d$  y  $q$  de su representación ARIMA( $p, d, q$ ). [6]  
(b) ¿Cuál es la característica importante de esta serie? Dada ésta característica, ¿existe otra representación ARIMA de este proceso? [6]  
(c) Demuestra que  $\Delta y_t$  es un proceso estacionario. [6]  
(d) Calcula la función de autocorrelación de  $\Delta y_t$ , utilizando las ecuaciones de Yule-Walker. [10]  
(e) ¿Cuál es la notación generalizada para modelos ARIMA con estacionalidad? [5]

Total de pregunta 4: [33]

### 3. Modelos de series temporales multivariantes

5. (a) En el análisis de modelos de vectores autoregresivos (VAR), distinguimos lo que se llama un VAR estructural y lo que se llama un VAR estándar. ¿Cuál es la diferencia entre ambos modelos? [7]
- (b) ¿Qué significa cuando se habla de la necesidad de identificar un modelo de vectores autoregresivos? Da un ejemplo de un método de identificación (que no sea el método de Blanchard y Quah) y explica en breve su idea principal. [7]

Blanchard y Quah (1989) proponen un elaborado método de identificación de un VAR que sirve para descomponer el producto nacional en sus componentes temporales y permanentes.

El VAR estructural que proponen es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

donde

$$\Sigma_\varepsilon := \begin{bmatrix} \text{Var}(\varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \text{Var}(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$y_t$  := producto nacional,

$z_t$  := tasa del desempleo.

El VAR estructural se puede escribir también así:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k) \varepsilon_{1,t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{12}(k) \varepsilon_{2,t-k}, \\ z_t &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{21}(k) \varepsilon_{1,t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{22}(k) \varepsilon_{2,t-k}. \end{aligned}$$

Por otra parte, el VAR estándar es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{bmatrix}.$$

- (c) Blanchard y Quah imponen la siguiente restricción: [7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k) \varepsilon_{1,t-k} = 0.$$

Explica en breve cómo esta ecuación sirve para dar una interpretación económica a los "shocks"  $\varepsilon_{1,t}$  y  $\varepsilon_{2,t}$  (además de hacer posible la identificación del modelo).

(d) Del modelo estándar, se puede derivar la siguiente ecuación:

[7]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A^*|} \begin{bmatrix} 1 - A_{22}(L)L & A_{12}(L)L \\ A_{21}(L)L & 1 - A_{11}(L)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$A^* := \begin{bmatrix} 1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L \end{bmatrix}^{-1}.$$

Desconocemos inicialmente la siguiente matriz:

$$C(0) := \begin{bmatrix} c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0) \end{bmatrix}.$$

Dada la ecuación (6), explica (en palabras, sin cálculos) por qué el conocimiento de la matriz  $C(0)$  es importante para recuperar los parámetros  $c_{11}(k)$ ,  $c_{12}(k)$ ,  $c_{21}(k)$  y  $c_{22}(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  del VAR estructural en ecuación (5).

(e) ¿Para qué puede servir el conocimiento de  $c_{11}(k)$ ,  $c_{12}(k)$ ,  $c_{21}(k)$  y  $c_{22}(k)$ ?

[6]

Total de pregunta 5: [34]

6. Distinguiamos dos tipos de modelos de vectores autoregresivos (VAR). Un VAR estructural (sistema primitivo) del primer orden tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}, \\ z_t &= b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yt} &\sim \text{WN}(0, \sigma_y^2), \\ \varepsilon_{zt} &\sim \text{WN}(0, \sigma_z^2), \\ \text{Cov}(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{z,t-k}) &= 0 \quad \forall t, k. \end{aligned}$$

Un VAR estándar, por otro lado, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_t &= a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t}, \\ z_t &= a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} e_{1t} &\sim \text{WN}(0, \sigma_1^2), \\ e_{2t} &\sim \text{WN}(0, \sigma_2^2), \\ \text{Cov}(e_{1t}, e_{2t}) &= \sigma_{12}. \end{aligned}$$

- (a) I. Demuestra cómo se puede escribir el VAR estructural en ecuación (7) en términos de vectores y matrices. Escribe los vectores y matrices con todos sus elementos. [2]  
II. Demuestra cómo se puede escribir el VAR estándar en ecuación (8) en términos de vectores y matrices. Escribe los vectores y matrices con todos sus elementos. [2]
- (b) I. Explica cómo se puede convertir un VAR estructural en un VAR estándar. [2]  
II. ¿Qué relación existe entonces entre  $e_{1t}$  y  $e_{2t}$  por un lado y  $\varepsilon_{yt}$  y  $\varepsilon_{zt}$  por otro? [2]
- (c) Queremos aplicar la descomposición de Choleski y, para ello, suponemos que  $b_{21} = 0$ .  
I. Escribe de nuevo el VAR estructural en términos de vectores y matrices, suponiendo que  $b_{21} = 0$ . Escribe los vectores y matrices con todos sus elementos. [3]  
II. A este VAR estructural (con  $b_{21} = 0$ ), aplica ahora la transformación necesaria para obtener un VAR estándar. [3]  
III. Ahora, "igualando parámetros" entre el VAR estructural y el VAR estándar, demuestra qué relaciones existen entre los parámetros del VAR estructural ( $b_{10}, b_{20}, b_{12}, \gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{12}, \gamma_{22}, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ ) y los parámetros del VAR estándar ( $a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12}$ ). [4]  
IV. ¿Es posible identificar el VAR estructural desde el VAR estándar? (Una explicación muy breve es suficiente, no hace falta ningún tipo de cálculo.) [2]

Ahora miramos otro problema. Considera el siguiente modelo de vectores autoregresivos:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

- (d) Del modelo en ecuación (9), deriva una ecuación en diferencias univariante de la variable  $y_t$ . [5]  
(e) Determina si  $\{y_t\}$  es estacionario. [4]  
(f) Caracteriza la función impulso-respuesta de  $y_t$  para un shock de magnitud unitaria de  $e_{1t}$  y para un shock de magnitud unitaria de  $e_{2t}$ . [5]

Total de pregunta 6: [34]

## Referencias

Blanchard, O. J. y Quah, D. (1989), 'The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances', *American Economic Review* **79**(4), 655–673.